

Propriétés des fonctions d'une variable réelle

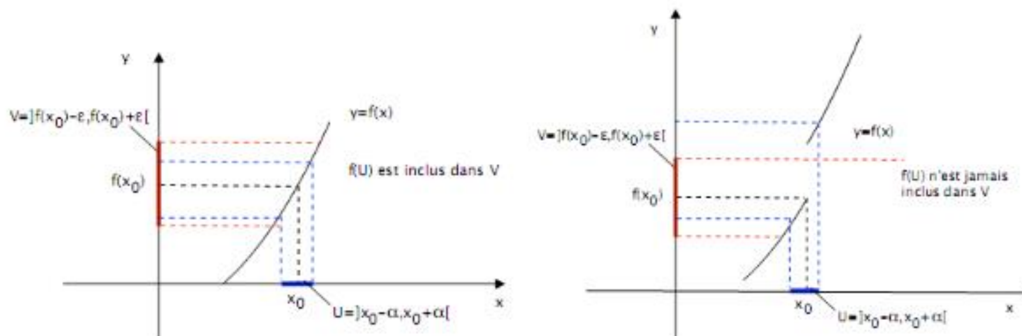
Fonctions continues

1- *Continuité en un point*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $\mathcal{D}_f$ sont ensemble de définition. On rappelle qu'une fonction est continue en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. En revenant à la notion de limite d'une fonction en un point, cela s'écrit

> **Définition** Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est continue en x_0 lorsque, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que, si $x \in \mathcal{D}_f$ et $|x - x_0| \leq \alpha$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$.

De manière un peu plus imagée, la fonction f est continue en x_0 lorsque pour tout voisinage



Une fonction continue en x_0, et une qui ne l'est pas.

V de $f(x_0)$ (ce qui correspond à choisir un $\epsilon > 0$), on peut trouver un voisinage U de x_0 (c'est- à dire un $\alpha > 0$) tel que



$$x \in U \cap \mathcal{D}_f \Longrightarrow f(x) \in V$$

Le résultat suivant n'a pas un très grand intérêt à notre niveau, mais il peut permettre de simplifier l'étude de la continuité. Il faut par contre bien comprendre sa preuve.

> **Proposition** *Les énoncés suivants sont équivalents :*
> 1. *La fonction f est continue en x_0.*
> 2. *Pour toute suite (x_n) qui tend vers x_0, on a $\lim(f(x_n)) = f(x_0)$.*

Preuve: On a déjà vu que (1) entraine (2). On démontre maintenant la réciproque par l'absurde. Supposons que (2) soit vraie et que (1) soit fausse : il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver un $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ tel que $f(x) \notin]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$. En particulier en prenant $\alpha = 1/n$, on construit une suite (x_n) telle que $|x_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(x_0)| > \epsilon$, ce qui est absurde. □

Pour fixer les idées, on rappelle que

> **Proposition**
> – *Si f et g sont deux fonctions continues en x_0, alors $f + g$ et fg sont continues en x_0.*
> – *Si f est continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, alors $1/f$ est continue en x_0.*
> – *Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

> **Proposition**
> – *Si f et g sont deux fonctions continues en x_0, alors $f + g$ et fg sont continues en x_0.*
> – *Si f est continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, alors $1/f$ est continue en x_0.*
> – *Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Preuve: On va utiliser la caractérisation avec des suites (même si une démonstration directe n'est pas beaucoup plus difficile : **Exercice !**). Soit donc (x_n) une suite qui tend vers x_0. On sait que $f(x_n) \to f(x_0)$ et que $g(x_n)$ to $g(x_0)$, donc $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to (f+g)(x_0)$ et $(fg)(x_n) \to (fg)(x_0)$ en utilisant les résultats sur la limite et le produit d'une somme de suites. Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) qui tend vers x_0, on a montré le premier point. Le second point découle directement du résultat sur la limite de l'inverse d'une suite. Enfin puisque g est continue en $f(x_0)$, on sait que $\lim(g(f(x_n))) = g(\lim(f(x_n)))$, ce qui donne bien $\lim(g(f(x_n))) = g(f(x_0))$. □



Fonctions continues sur un intervalle

1-<u>Fonctions continues sur un intervalle</u>

<u>Définition</u> On dit que f est continue sur l'intervalle ouvert]a, b[lorsque f est continue en chaque point de]a, b[. On dit que f est continue sur l'intervalle fermé [a, b] lorsque
f est continue en chaque point de]a, b[et f est continue à droite en a et à gauche en b.

<u>Proposition</u> *Soit a < b deux nombres réels. Si f est une fonction continue sur [a, b], alors f est bornée sur [a, b].*

<u>Preuve</u>: Soit A = {x ∊ [a, b], f est bornée sur [a, x]}. L'ensemble A est majoré par b, et c'est une partie non-vide de R : a ∊ A puisque f(a) est un majorant et un minorant de f sur [a, a]. Donc A admet une borne supérieure, que l'on note c. Supposons que c < b. Puisque f est continue en c, il existe α > 0 tel que si |x − c| ≤ α et x ∈ [a, b], alors f(c)−1 ≤ f(x) ≤ f(c)+1. Pour δ = min{α, (b−c)/2} on a donc f bornée sur [a, c+δ], ce qui est absurde. Donc c = b et f est bornée sur [a, b].

Attention ! on ne peut pas affaiblir l'hypothèse. Par exemple la fonction f : x → 1/x est continue sur]0, 1], mais elle n'y est pas bornée : il est indispensable que l'intervalle soit fermé. De mˆeme, la fonction f : x → x2 est continue sur [0,+∞[, mais n'est pas bornée sur cet intervalle. On retiendra donc qu' une fonction continue sur un intervalle borné et fermé de **IR** est bornée.

Utilisons encore une fois l'axiome de la borne supérieure : puisque l'ensemble {f(x), x ∈ [a, b]} est non-vide (a< b) et borné, il admet une borne supérieure M et une borne inférieure m. Le résultat qui suit montre que m et M sont en fait respectivement un minimum et un maximum pour f sur [a, b].

Proposition Si f est une fonction continue sur [a, b], il existe x0 et x1 dans [a, b] tels que
f(x0) ≤ f(x) ≤ f(x1) pour tout x ∈ [a, b].

> **Proposition** *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, il existe x_0 et x_1 dans $[a, b]$ tels que*
> $$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

Preuve: Soit donc M la borne supérieure de f sur $[a, b]$, et supposons que $f(x) \neq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = 1/(M - f(x))$ est définie et continue sur $[a, b]$, donc elle est bornée : il existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tel que $0 < 1/(M - f(x)) \leq M_1$ pour tout $x \in [a, b]$. On a alors $M - f(x) > \frac{1}{M_1}$ et $f(x) < M - 1/M_1$ pour tout $x \in [a, b]$, ce qui contredit le fait que M est le plus petit des majorants de f sur $[a, b]$. Donc il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) = M$.
On montre de la même manière l'existence d'un $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \inf\{f(x),\ x \in [a, b]\}$.

2-<u>Le Théorème des Valeurs Intermédiaires</u>

<u>Proposition</u> *Soit a < b deux nombres réels, et f une fonction continue sur [a, b]. Si y est compris entre f(a) et f(b), alors il existe un moins un c ∈ [a, b] tel que f(c) = y.*

<u>Preuve</u>: On va supposer que f(a) < f(b), la preuve étant identique dans le cas ou f(b) > f(a). Soit donc
y ∈]f(a), f(b)[, et A = {x ∈ [a, b], f(t) < y pour tout t ∈ [a, x]}.
A est non-vide et majoré, donc admet une borne supérieure c. Supposons que f(c) < y. Par continuité, il existe δ > 0 tel que f(c + δ) < c, ce qui est absurde. De même f(c) ne peut pas être strictement supérieur ` y, donc f(c) = y.

On peut faire mieux :

<u>Proposition</u> *Soit a < b deux nombres réels et f une fonction continue sur [a, b].*
Soient aussi m et M les bornes inférieures et supérieures de f sur [a, b]. Si y ∈ [m,M], alors il existe un moins un c ∊ [a, b] tel que f(c) = y.

<u>Preuve</u>: Il suffit d'appliquer le résultat précédent sur l'intervalle d'extrémités x_0 et x_1, ou x_0, x_1 ∈ [a, b] sont tels que $f(x_0)$ = m et $f(x_1)$= M.

Pour résumer, on a démontré le résultat suivant :

<u>Proposition</u> *Soient a < b deux réels, et f : IR → IR une fonction continue sur [a, b]. l'ensemble f([a, b]) = {f(x), x ∈ [a, b]} est l'intervalle [m,M] où m et M sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de f sur [a, b].*

Dérivées



1-Définitions

Définition Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ lorsque f est dérivable (i.e. admet un D.L. à l'ordre 1) en chaque point de $]a,b[$. On note alors f' la fonction définie sur $]a,b[$ qui a x associe le nombre dérivé de f au point x.

Définition Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, définie sur $]a,b[$ est de classe C^0 sur cet intervalle lorsque f est continue sur $]a,b[$. Si $k\geq 1$ est un entier, on dit que f est de classe C^k sur $]a,b[$ lorsque f est k fois dérivable sur $]a,b[$, et $f^{(k)}$ est continue sur $]a,b[$.

2- Extremums

Définition Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et I une partie de $\mathcal{D}$. On dit que $x_0\in I$ est

- un maximum de f sur I lorsque, pour tout $x\in I$ on a $f(x)\leq f(x_0)$;
- un minimum de f sur I lorsque, pour tout $x\in I$ on a $f(x)\geq f(x_0)$;
- un extremum de f sur I si c'est un maximum ou un minimum de f sur I ;
- un extremum global de f si c'est un extremum sur $\mathcal{D}$;
- un extremum local de f s'il existe un voisinage I de x_0 tel que x_0 est un extremum de f sur I.

Proposition *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a,b[$. Si f admet un extremum local en un point c de $]a,b[$ alors $f'(c)=0$.*

Preuve: On n'écrit la preuve que dans le cas d'un maximum. Soit donc c un maximum local de f : il existe un voisinage $]c-\alpha,c+\alpha[$ de c tel que, pour tout $x\in]c-\alpha,c+\alpha[$, on a $f(x)\leq f(c)$. Puisque f est dérivable en c, il existe une fonction ϵ de limite nulle en 0 telle que $f(c+h)=f(c)+hf'(c)+h\epsilon(h)$, ce qu'on peut écrire

$$f(c) = f(c+h) - h(f'(c) + \epsilon(h)).$$

Supposons que $f'(c) > 0$. Puisque $\epsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$, il existe un voisinage de c de la forme $]c - h_0, c + h_0[$ tel que $f'(c) + \epsilon(h) > f'(c)/2 > 0$. Mais alors pour $0 < h < h_0$, on a $h(f'(c) + \epsilon(h)) > 0$, donc $f(c) < f(c+h)$ ce qui est absurde. Le même raisonnement montre qu'on ne peut pas non plus avoir $f'(c) < 0$, et donc on a bien $f'(c) = 0$. □

La réciproque de cette proposition est fausse : pour la fonction $f : x \mapsto x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en 0. Pour l'instant donc, on sait seulement que l'on doit chercher les éventuels extremums locaux d'une fonction dérivable f parmi ses **points critiques**, i.e. les points x tels que $f'(x) = 0$.

3- Le Théorème des Accroissements Finis

Proposition *Soit g une fonction continue sur $[a, b]$. Si g est dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$g(b) - g(a) = (b - a)g'(c).$$

Preuve: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$f(x) = g(x) - g(a) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a).$$

On a $f(a) = f(b) = 0$, et f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. De plus

$$f'(x) = g'(x) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a},$$

donc $g(b) - g(a) = (b - a)g'(c)$ si et seulement si $f'(c) = 0$.
D'après le Théorème de Weierstrass, il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

- Cas 1 : x_1 et x_2 appartiennent à $\{a, b\}$. Alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$, donc f' est la fonction constante nulle sur $]a, b[$: le théorème est vrai.
- Cas 2 : x_2, par exemple, est différent de a et de b. On peut alors appliquer le résultat précédent : x_2 est nécessairement un point critique de f, i.e. $f'(x_2) = 0$.



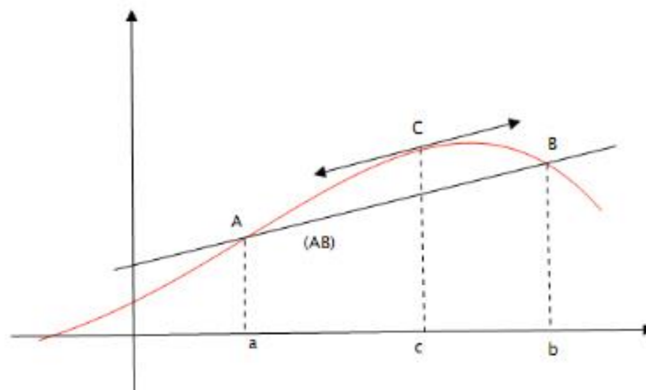


FIGURE – Le TAF : il y a un point où la tangente à C_f est parallèle à la droite (AB).

Il y a deux idées dans cette preuve : d'abord on peut se ramener au cas où $f(b) = f(a) = 0$, et le TAF dans ce cas revient à dire qu'il existe un point $c \in]a, b[$ où la dérivée de f s'annule (ce résultat porte le nom de Théorème de Rolle). La deuxième idée repose sur le théorème de Weierstrass : puisque f est continue sur $[a, b]$, f admet un maximum et un minimum sur cet intervalle, qui ne peuvent pas être tous les deux en a ou en b : il s'agit donc d'un point critique.

Proposition *Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$. Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur $]a, b[$*

Preuve: Soient $x_1 \leq x_2$ deux points de $]a, b[$. La fonction f est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$, donc il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$. Si f' est positive sur $]a, b[$, on a $f'(c) \geq 0$ donc $f(x_2) \geq f(x_1)$. Ceci tant vrai pour tout couple (x_1, x_2) de points de $]a, b[$, f est bien croissante sur cet intervalle.



4-**Formule de Taylor-Lagrange**

> **Proposition** *Soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, telle que $f^{(n)}$ soit dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que*
>
> $$f(b) = T_{n,a}(b) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$
>
> *où $T_{n,a}(x)$ est le polynôme de Taylor d'ordre n de f au point a :*
>
> $$T_{n,a}(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$
>
> *Cette égalité porte le nom de Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n.*

Preuve: Il suffit d'appliquer le TAF (en fait Rolle) à la fonction g définie par

$$g(x) = f(b) - T_{n,x}(b) - C\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

où C est choisi de sorte que $g(a) = 0$.

Voici un cas où l'on peut affirmer qu'un point critique est un extremum local :

> **Proposition** *Soit f une fonction de classe C^2 sur $]a, b[$, et $x_0 \in]a, b[$. Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, alors f admet un extremum local en x_0 : c'est un maximum local si $f''(x_0) < 0$ et un minimum local si $f''(x_0) > 0$.*

Preuve: On n'écrit la preuve que dans le cas $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$. Puisque f'' est continue en x_0, il existe $h_0 > 0$ tel que, pour tout $c \in]x_0 - h_0, x_0 + h_0[$, on a $f''(c) > 0$. Or pour chaque h tel que $|h| < h_0$, il existe c entre x et $x + h$, donc dans $]x_0 - h_0, x_0 + h_0[$, tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(c) = f(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(c),$$

ce qui montre que $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$: x_0 est bien un minimum local pour f.